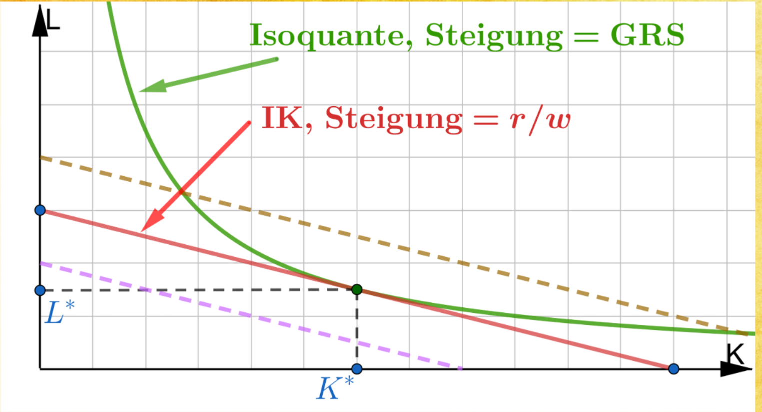
KOSTENMINIMIERUNG



KAPITAL VS ARBEIT

+ KOSTENFUNKTION

10 MIN VWL

Produktion mit...

- unterschiedlichen Kombinationen von Kapitel (K) und Arbeit (L)
- **Produktionsfunktion** $x = F(K, L)$ zeigt die Produktion x für verschiedene Kombinationen von K und L

$\Rightarrow$ **Isoquanten** und **Grenzrate der Substitution (GRS)**

führt zu Kosten C:

- Preis pro Einheit Kapital $K \Rightarrow r$
- Preis pro Einheit Arbeit $L \Rightarrow w$

$\Rightarrow$ **Iso-Kosten-Gerade**

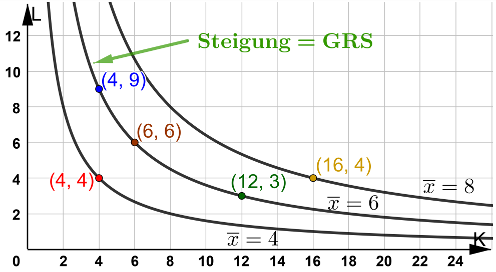
Finde die kostenminimierende Kombination von K und L, welche die gewünschte Menge x produziert $\Rightarrow$ Kostenfunktion $C(x)$

Isoquante (IQ)

Eine Isoquante zeigt alle Kombinationen von Kapital K und Arbeit L, welche die **gleiche Menge an Output** $\overline{x}$ produzieren.

Beispiel:
Produktionsfunktion $x = F(K, L) = \sqrt{KL}$

- $F(4, 9) = 6$, $F(6, 6) = 6$, $F(12, 3) = 6$
  $\Rightarrow$ alle auf der gleichen Isoquante mit $\overline{x} = 6$
- $F(16, 4) = 8$ $\Rightarrow$ höhere Isoquante
- $F(4, 4) = 4$ $\Rightarrow$ niedrigere Isoquante



Steigung der Isoquante $\Rightarrow$ Grenzrate der Substitution (GRS)

Die Steigung der Isoquante zeigt uns, in welchem **Verhältnis wir Arbeit durch Kapital ersetzen können, ohne den Output x zu verändern.**

$$\text{(absolute) Steigung der Isoquante} = \text{GRS}$$

Iso-Kosten-Gerade (IK)

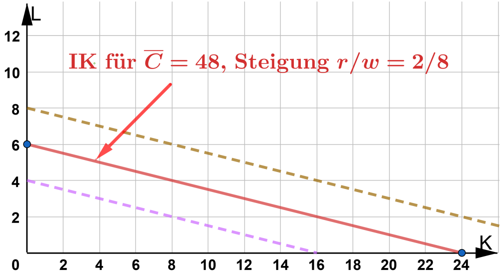
Eine Iso-Kosten-Gerade zeigt alle **Kombinationen aus Kapital K und Arbeit L, welche die gleichen Kosten** verursachen. Wir können für jedes beliebige Kostenniveau $\overline{C}$ eine Iso-Kosten-Gerade zeichnen.

Unsere **Produktionskosten** betragen allgemein:

$$r \cdot K + w \cdot L = \overline{C}$$
$$L = \frac{\overline{C}}{w} - \frac{r}{w} \cdot K$$

Beispiel: $r = 2, w = 8, \overline{C} = 48 \Rightarrow$

$$L = \frac{48}{8} - \frac{2}{8} \cdot K$$



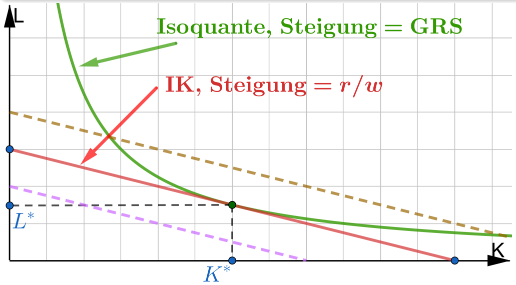
Steigung der Iso-Kosten-Gerade ⇒ Preisverhältnis

Die **Steigung** der Iso-Kosten-Gerade (= Preisverhältnis) zeigt das Verhältnis, in dem wir die zwei Produktionsfaktoren **auf den Märkten austauschen (handeln) können**.

$$\text{(absolute) Steigung der Iso-Kosten-Gerade} = \frac{r}{w}$$

Kosten-Minimierung

- Niedrigste Iso-Kosten-Gerade (IK)...
- welche die gewünschte Isoquante (IQ) erreicht (d.h. die gewünschte Menge x produziert)



erlaubt es nicht, $\overline{x}$ zu produzieren!

nicht die niedrigsten Kosten, um $\overline{x}$ zu produzieren!

IK mit Kosten minimierender Kombination!

Ergebnis: Kosten sind minimiert...

- wo Isoquante und Iso-Kosten-Gerade sich **gerade berühren („Tangentialpunkt“)**
- im Kosten-Minimum müssen Isoquante und Iso-Kosten-Gerade also die **gleiche Steigung** haben!

GRS (Steigung IQ) = Preisverhältnis (Steigung IK)

Was bedeutet das?

- **Steigung der Isoquante (GRS):**
  Sagt uns, was eine Einheit K im Vergleich zu einer Einheit L **produziert**
- **Steigung der Iso-Kosten-Gerade (Preisverhältnis):**
  Sagt uns, was eine Einheit K im Vergleich zu einer Einheit L **kostet**

Warum sind die Kosten minimiert für GRS = Preisverhältnis?

- Was wäre, wenn GRS > Preisverhältnis?
- K erhöht im Vergleich zu L den **Output** (**GRS**) stärker...
- als K im Vergleich L **kostet** (**Preisverhältnis**)
- Kostengünstigere Produktion durch $K \uparrow$ und $L \downarrow \Rightarrow C \downarrow$

Ergebnis

Kosten sind minimiert, wenn GRS = Preisverhältnis!

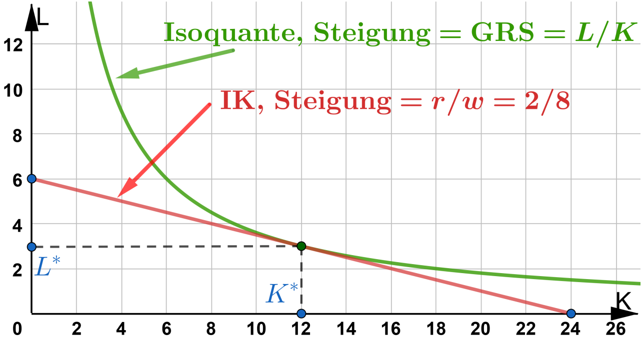
Einschränkung: Funktioniert nur für konvexe („normal gekrümmte") Isoquanten und daher nicht bei

- vollkommenen Substituten
- vollkommenen Komplementen

Beispiel: $F(K,L) = x = \sqrt{K \cdot L}$, $r = 2$, $w = 8$

$$\textbf{GRS} = \frac{\text{Grenzprodukt K}}{\text{Grenzprodukt L}} = \frac{\frac{\partial F}{\partial K}}{\frac{\partial F}{\partial L}} = \frac{\frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}}}{\frac{\sqrt{K}}{2\sqrt{L}}} = \frac{\sqrt{L}}{2\sqrt{K}} \cdot \frac{2\sqrt{L}}{\sqrt{K}} = \frac{L}{K}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{GRS} &= \textbf{Preisverhältnis} \\
\frac{L}{K} &= \frac{1}{4} && \Rightarrow L = K/4 \\
x &= \sqrt{K \cdot L} \\
x^2 &= K \cdot L && \Rightarrow L = x^2/K \\
K/4 &= x^2/K \\
K^2 &= 4x^2 \Rightarrow K^*(x) = 2x \\
L &= K/4 = 2x/4 \Rightarrow L^*(x) = x/2
\end{aligned}$$



Beispiel: $x = 6 \Rightarrow K^* = 12, L^* = 3$

Wir kennen bereits die allgemeine Gleichung für unsere **Kosten** in Abhängigkeit von K und L:

$$C = rK + wL$$

Wir haben eben die **bedingten Faktornachfragen** $K^*(x) = 2x$ und $L^*(x) = x/2$ berechnet:

Bedingte Faktornachfrage $K(x)$ und $L(x)$

Die **bedingten** Faktornachfragen nach Kapital und Arbeit, $K(x)$ und $L(x)$, zeigen **in Abhängigkeit von der gewünschten Menge x** ($\Rightarrow$ bedingt!) die kostenminimierende Nachfrage nach Kapital und Arbeit.

Durch **Einsetzen** in die allgemeine Gleichung für die Kosten erhalten wir die Kostenfunktion $C(x)$:

Kostenfunktion $C(x)$

Die Kostenfunktion $C(x)$ gibt uns die **minimalen Kosten** für die Produktion von x Einheiten an:

$$C(x) = rK^*(x) + wL^*(x)$$

Beispiel: Wir hatten auf der vorherigen Folie $r = 2$ sowie $w = 8$ verwendet und die bedingten Faktornachfragen $K^*(x) = 2x$ und $L^*(x) = x/2$ erhalten $\Rightarrow$

$$C(x) = rK(x) + wL(x) = 2 \cdot 2x + 8 \cdot x/2 = 8x$$

Die minimalen Kosten, um $x = 6$ Einheiten zu produzieren, betragen also $C(6) = 8 \cdot 6 = 48$