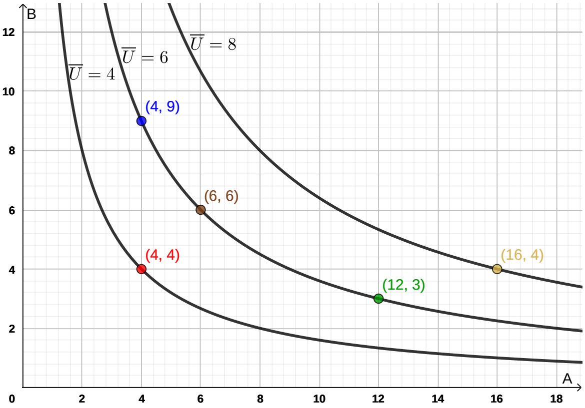
Indifferenzkurve und Grenzrate der Substitution – verstehen, zeichnen, rechnen

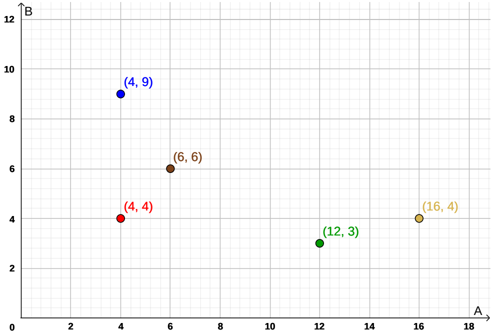


Worum geht's?

- Unterschiedliche Kombinationen aus Äpfeln (A) und Bier (B)
- Welche ist „die beste“ Kombination?
- Nutzenfunktion $U(A, B)$ „bewertet“ verschiedene Kombinationen
- Höher Nutzen ist besser

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
U(A, B) &= \sqrt{AB} \\
U(16, 4) &= \sqrt{16 \cdot 4} = 8 \\
U(4, 4) &= \sqrt{4 \cdot 4} = 4 \\
U(4, 9) &= \sqrt{4 \cdot 9} = 6 \\
U(6, 6) &= \sqrt{6 \cdot 6} = 6 \\
U(12, 3) &= \sqrt{12 \cdot 3} = 6
\end{aligned}
$$



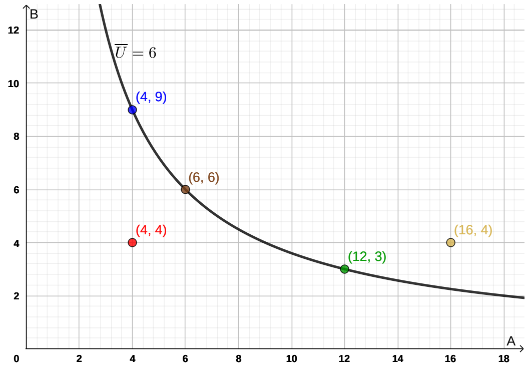
$\Rightarrow$ die letzten drei Kombinationen stiften identischen Nutzen
$\Rightarrow$ wir sind „indifferent“ welche dieser drei Kombinationen wir erhalten

Indifferenzkurve

Eine Indifferenzkurve markiert alle Güterkombinationen, die den selben Nutzen stiften.

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
U(A,B) &= \sqrt{AB} \\
U(16,4) &= \sqrt{16\cdot 4} = 8 \\
U(4,4) &= \sqrt{4\cdot 4} = 4 \\
U(4,9) &= \sqrt{4\cdot 9} = 6 \\
U(6,6) &= \sqrt{6\cdot 6} = 6 \\
U(12,3) &= \sqrt{12\cdot 3} = 6
\end{aligned}
$$



Berechnung der Indifferenzkurve zum Nutzenniveau $\overline{U} = 6$:

$$U = \sqrt{AB} = 6 \Rightarrow \sqrt{B} = \frac{6}{\sqrt{A}} \Rightarrow B = \frac{36}{A}$$

Indifferenzkurve mathematisch

Nutzenfunktion $\Rightarrow$ Indifferenzkurve

Wenn wir eine beliebige Nutzenfunktion $U(A, B)$ haben, erhalten wir die allgemeine Indifferenzkurve, indem wir...

1. die Nutzenfunktion gleich $\overline{U}$ setzen (d.h. Nutzen konstant halten) und
2. nach der Variable an der vertikalen Achse auflösen

Beispiel:

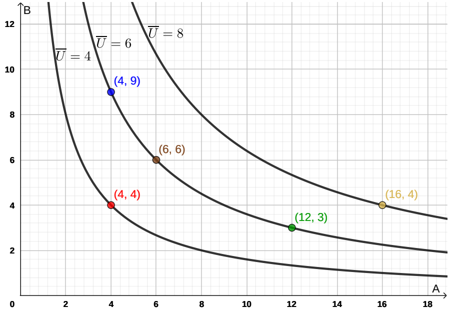
$$
\begin{aligned}
U(A, B) &= \sqrt{AB} \\
\overline{U} &= \sqrt{AB} \\
\sqrt{B} &= \frac{\overline{U}}{\sqrt{A}} \qquad |(\quad)^2 \\
B &= \frac{\overline{U}^2}{A}
\end{aligned}
$$

Unterschiedliche Nutzenniveaus

Wir können zu jedem Nutzenniveau einer Nutzenfunktion die dazugehörige Indifferenzkurve zeichnen:

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
U(A,B) &= \sqrt{AB} \\
U(16,4) &= \sqrt{16\cdot 4} = 8 \\
U(4,4) &= \sqrt{4\cdot 4} = 4 \\
U(4,9) &= \sqrt{4\cdot 9} = 6 \\
U(6,6) &= \sqrt{6\cdot 6} = 6 \\
U(12,3) &= \sqrt{12\cdot 3} = 6
\end{aligned}
$$



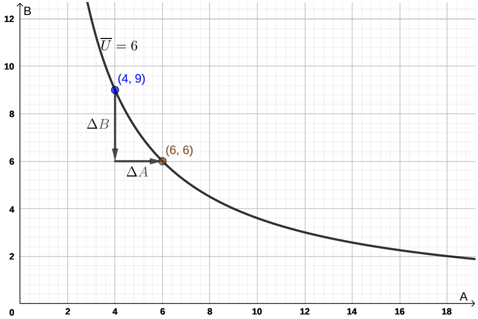
$\Rightarrow$ Je weiter „rechts-oben“ eine Indifferenzkurve liegt, desto höher ist $\overline{U}$

$\Rightarrow$ Indifferenzkurven mit unterschiedlichem $\overline{U}$ schneiden sich nie

Grenzrate der Substitution (GRS)

Die Grenzrate der Substitution zeigt uns das **Verhältnis**, in dem wir bereit sind, die **Güter gegeneinander auszutauschen** (zu „substituieren"), ohne dass sich der Nutzen ändert $\Rightarrow$ selbe Indifferenzkurve.

- Wir haben momentan 4 Äpfel und 9 Bier $\Rightarrow$ Punkt $U(4,9) = 6$
- Nun klaut man uns 3 Bier $\Rightarrow \Delta B = -3$
- Dann müssen wir 2 Äpfel als Entschädigung bekommen ($\Delta A = 2$), damit wir den Nutzen konstant auf $\overline{U} = 6$ halten $\Rightarrow$ Punkt $U(6,6)$



- **Veränderung von B:** $\Delta B = 6 - 9 = -3$
- **Veränderung von A:** $\Delta A = 6 - 4 = 2$
- **Austauschverhältnis:**

$$\text{GRS} = \left|\frac{\Delta B}{\Delta A}\right| = \left|\frac{-3}{2}\right| = 1,5$$

GRS berechnen: Variante 1

Indifferenzkurve $\Rightarrow$ GRS

Die GRS in einem Punkt entspricht der (absoluten) **Steigung der Indifferenzkurve**:

$$\text{GRS} = -\frac{dB}{dA}$$

Nutzenfunktion:

$$U(A,B) = \sqrt{AB}$$

Indifferenzkurve:

$$B = \frac{\overline{U}^2}{A}$$

GRS:

$$\text{GRS} = -\frac{dB}{dA} = -\left(-\frac{\overline{U}^2}{A^2}\right) = \frac{\overline{U}^2}{A^2}$$

Jetzt noch die Nutzenfunktion U einsetzen $\Rightarrow$

$$\text{GRS} = \frac{(\sqrt{AB})^2}{A^2} = \frac{AB}{A^2} = \frac{B}{A}$$

GRS berechnen: Variante 2

Grenznutzen $\Rightarrow$ GRS

Die GRS in einem Punkt entspricht dem **Verhältnis der Grenznutzen**:

$$\text{GRS} = \frac{\text{Grenznutzen von A}}{\text{Grenznutzen von B}} = \frac{\frac{\partial U}{\partial A}}{\frac{\partial U}{\partial B}}$$

Nutzenfunktion:

$$U(A, B) = \sqrt{AB}$$

Grenznutzen:

$$\frac{\partial U}{\partial A} = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}, \quad \frac{\partial U}{\partial B} = \frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{B}}$$

GRS:

$$\text{GRS} = \frac{\frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}}}{\frac{\sqrt{A}}{2\sqrt{B}}} = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}} \cdot \frac{2\sqrt{B}}{\sqrt{A}} = \frac{B}{A}$$