Inhaltsverzeichnis

1 Rechnen mit Potenzen

1.1 Negative Exponenten

Ein negativer Exponent kehrt die Basis um:

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

Beispiel 1:

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Beispiel 2:

$$\frac{1}{k^{-2}} = k^2$$

Beispiel 3:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^4 = \left(\frac{y}{x}\right)^{-4}$$

Beispiel 4:

$$\left(\frac{n+\delta}{s}\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{n+\delta}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Beispiel 5:

$$\frac{A^{-\frac{3}{4}}B^{\frac{3}{4}}}{A^{\frac{1}{4}}B^{-\frac{1}{4}}} = \frac{B^{\frac{3}{4}}B^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{3}{4}}A^{\frac{1}{4}}}$$

1.2 Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis

Beim Multiplizieren von Potenzen mit gleicher Basis addieren wir die Exponenten:

$$a^x \cdot a^y \quad = \quad a^{x+y}$$

Beispiel 1:

$$k \cdot k^{\alpha} \quad = \quad k^{1+\alpha}$$

Beispiel 2:

$$x^2 \cdot x^3 \quad = \quad x^5$$

Beispiel 3:

$$2^4 \cdot 2^5 \quad = \quad 2^9$$

Beispiel 4:

$$\frac{B^{\frac{3}{4}} B^{\frac{1}{4}}}{A^{\frac{3}{4}} A^{\frac{1}{4}}} \quad = \quad \frac{B}{A}$$

1.3 Division von Potenzen mit gleicher Basis

Beim Dividieren von Potenzen mit gleicher Basis subtrahieren wir die Exponenten:

$$\frac{a^x}{a^y} \quad = \quad a^{x-y}$$

Beispiel 1:

$$\frac{x^5}{x^2} \quad = \quad x^3$$

Beispiel 2:

$$\frac{k^{\alpha+1}}{k} \quad = \quad k^{\alpha}$$

Beispiel 3:

$$\frac{2^7}{2^3} \quad = \quad 2^4$$

1.4 Potenz einer Potenz

Wird eine Potenz erneut potenziert, multiplizieren wir die Exponenten:

$$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$$

Beispiel 1:

$$(x^2)^3 = x^6$$

Beispiel 2:

$$(k^{1+\alpha})^2 = k^{2(1+\alpha)} = k^{2+2\alpha}$$

Beispiel 3:

$$((x^3)^2)^4 = x^{24}$$

1.5 Nullter Exponent

Jede Zahl (außer 0) hoch 0 ergibt 1:

$$x^0 = 1$$

Beispiel 1:

$$5^0 = 1$$

Beispiel 2:

$$a^0 = 1$$

Beispiel 3:

$$(k^{3+\alpha})^0 = 1$$

1.6 Wurzeln als Potenzen schreiben

Wurzeln lassen sich als Potenzen mit Exponenten schreiben:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} &= x^{\frac{1}{2}} \\ \sqrt[n]{x} &= x^{\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$$

Beispiel 2:

$$\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$$

Beispiel 3:

$$\sqrt{4x^2} = (4x^2)^{\frac{1}{2}} = 2x$$

2 Ableitungsregeln

2.1 Definition Ableitung

Wir betrachten die Variable y, die eine Funktion der Variable x ist:

$$y = f(x)$$

Wenn wir wissen wollen, wie sich eine (sehr kleine) Änderung von x auf y auswirkt, müssen wir y nach x ableiten:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Graphisch entspricht die Ableitung der Steigung der Funktion f.

2.2 Potenzregel

Die Potenzregel beschreibt, wie man eine Potenzfunktion ableitet. Der Exponent wird dabei als Faktor vor die Variable geschrieben und gleichzeitig um 1 verringert:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\alpha} \\ f'(x) &= \alpha x^{\alpha-1} \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \\ f'(x) &= 2x \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3(5x^2+2x) \\ f'(x) &= 3x^2(5x^2+2x) + x^3(10x+2) \end{aligned}$$

2.3 Konstantenregel

Die Ableitung einer konstanten Funktion ist immer null. Das bedeutet: Eine horizontale Linie hat keine Steigung.

$$\begin{aligned} f(x) &= c \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= 100 \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= \pi \\ f'(x) &= 0 \end{aligned}$$

2.4 Logarithmusregel

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ ergibt den Kehrwert von x. Diese Regel ist besonders nützlich bei Nutzenfunktionen und in der Produktionstheorie.

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 2 (mit Kettenregel):

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(5x) \\ f'(x) &= \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 3 (mit Kettenregel):

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2x^4 + 3x^2) \\ f'(x) &= \frac{1}{2x^4 + 3x^2} \cdot (8x^3 + 6x) \end{aligned}$$

2.5 Summenregel

Die Summenregel besagt: Wenn eine Funktion die Summe zweier Terme ist, dann ist ihre Ableitung die Summe der Einzelableitungen.

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) + v(x) \\ f'(x) &= u'(x) + v'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 4x \\ f'(x) &= 2x + 4 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + \ln(x) \\ f'(x) &= 3x^2 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 2x \\ f'(x) &= 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

2.6 Produktregel

Wenn zwei Funktionen miteinander multipliziert werden, braucht man die Produktregel: Zunächst die erste Funktion ableiten und mit der zweiten, unveränderten multiplizieren. Dann genau umgekehrt: Die erste Funktion übernehmen wir unverändert und multiplizieren wir mit der Ableitung der zweiten Funktion. Am Schluss addieren wir.

$$\begin{aligned} f(x) &= u(x) \cdot v(x) \\ f'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \cdot \ln(x) \\ f'(x) &= \ln(x) + 1 \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \cdot (3x+1) \\ f'(x) &= 2x(3x+1) + x^2 \cdot 3 = 9x^2 + 2x \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3(5x^2+2x) \\ f'(x) &= 3x^2(5x^2+2x) + x^3(10x+2) \end{aligned}$$

2.7 Quotientenregel

Wenn eine Funktion als Bruch dargestellt ist, hilft die Quotientenregel. Die Ableitung folgt einem bestimmten Schema aus Zähler und Nenner.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{u(x)}{v(x)} \\ f'(x) &= \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2}{x^3} \\ f'(x) &= \frac{x^3 \cdot 2x - x^2 \cdot 3x^2}{x^6} = -\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x^7 - 3x^5 + 3}{4x^3} \\ f'(x) &= \frac{4x^3(14x^6 - 15x^4) - (2x^7 - 3x^5 + 3) \cdot 12x^2}{(4x^3)^2} \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\ln(x)}{x} \\ f'(x) &= \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \end{aligned}$$

2.8 Kettenregel

Die Kettenregel wird benötigt, wenn eine Funktion in eine andere „eingesetzt“ ist. Man leitet die äußere Funktion ab und multipliziert mit der Ableitung der inneren.

$$\begin{aligned} f(x) &= u(v(x)) \\ f'(x) &= u'(v(x)) \cdot v'(x) \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= (4x^3 + 5x + 2)^3 \\ f'(x) &= 3(4x^3 + 5x + 2)^2 \cdot (12x^2 + 5) \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{5x^2 + 3x} = (5x^2 + 3x)^{\frac{1}{2}} \\ f'(x) &= \frac{1}{2}(5x^2 + 3x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (10x + 3) \end{aligned}$$

Beispiel 3:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(2x^4 + 3x^2) \\ f'(x) &= \frac{1}{2x^4 + 3x^2} \cdot (8x^3 + 6x) \end{aligned}$$

2.9 Partielles Ableiten

Beim partiellen Ableiten betrachten wir eine Funktion mit mehreren Variablen (z.B. $f(x,y)$, $U(A,B)$, $F(K,L)$) und leiten nur nach einer dieser Variablen ab — alle anderen gelten als konstant. Dies ist besonders wichtig in der Mikroökonomik, z.B. bei Produktions-, Kosten- oder Nutzenfunktionen.

Beispiel 1: Produktion (Cobb-Douglas-Funktion)

$$\begin{aligned} Y &= F(K,L) = K^\alpha L^{1-\alpha} \\ \frac{\partial Y}{\partial K} &= \alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \\ \frac{\partial Y}{\partial L} &= (1-\alpha) K^\alpha L^{-\alpha} \end{aligned}$$

Beispiel 2: Nutzenfunktion I

Siehe auch Kapitel 1.6: Wurzel als Potenz schreiben!

$$\begin{aligned} U(A,B) &= \sqrt{AB} = A^{\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial U}{\partial A} &= \frac{1}{2} A^{-\frac{1}{2}} B^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{B}}{2\sqrt{A}} \end{aligned}$$

Beispiel 3: Nutzenfunktion II

$$\begin{aligned} U(x,y) &= \sqrt{x} + \ln(y) \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{1}{y} \end{aligned}$$

Beispiel 4: Quadratische Funktion

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 + y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \end{aligned}$$

3 Natürlicher Logarithmus und Rechenregeln

3.1 Grundlagen

Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion e^x. Er beantwortet die Frage: Mit welchem Exponenten muss e potenziert werden, um x zu erhalten?

Formell gilt: $e^y = x \quad \Leftrightarrow \quad \ln(x) = y$

Beispiel 1: Gib die Gleichung $e^x = 5$ nach x aufgelöst an.

$$\begin{aligned} e^x &= 5 \\ \ln(e^x) &= \ln(5) \\ x &= \ln(5) \end{aligned}$$

Beispiel 2: Löse $100 = A \cdot e^{0{,}03t}$ nach t.

$$\begin{aligned} 100 &= A \cdot e^{0{,}03t} \\ \frac{100}{A} &= e^{0{,}03t} \\ \ln\left(\frac{100}{A}\right) &= 0{,}03t \\ t &= \frac{1}{0{,}03} \cdot \ln\left(\frac{100}{A}\right) \end{aligned}$$

3.2 Produktregel für den Logarithmus

Der natürliche Logarithmus eines Produkts entspricht der Summe der Logarithmen der einzelnen Faktoren:

$$\ln(a \cdot b) = \ln(a) + \ln(b)$$

Beispiel 1:

$$\ln(2x) = \ln(2) + \ln(x)$$

Beispiel 2:

$$\ln(AB) = \ln(A) + \ln(B)$$

3.3 Quotientenregel für den Logarithmus

Der natürliche Logarithmus eines Bruchs ist die Differenz der Logarithmen von Zähler und Nenner:

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Beispiel 1:

$$\ln\left(\frac{x}{2}\right) = \ln(x) - \ln(2)$$

Beispiel 2:

$$\ln\left(\frac{A^2}{B}\right) = \ln(A^2) - \ln(B) = 2\ln(A) - \ln(B)$$

3.4 Potenzregel für den Logarithmus

Ein Exponent im Argument des Logarithmus kann vor den Logarithmus gezogen werden:

$$\ln(a^c) = c \cdot \ln(a)$$

Beispiel 1:

$$\ln(x^3) = 3\ln(x)$$

Beispiel 2:

$$\ln\left((AB)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\ln(A) + \frac{1}{2}\ln(B)$$

3.5 Ableitung des natürlichen Logarithmus

Die Ableitung des natürlichen Logarithmus lautet:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x) \\ f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Für verschachtelte Funktionen (Kettenregel):

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(g(x)) \\ f'(x) &= \frac{g'(x)}{g(x)} \end{aligned}$$

Beispiel 1:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(5x) \\ f'(x) &= \frac{1}{5x} \cdot 5 = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Beispiel 2:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(3x^2+1) \\ f'(x) &= \frac{6x}{3x^2+1} \end{aligned}$$

4 Potenzregeln auf einen Blick

Regel	Beschreibung
$x^a \cdot x^b = x^{a+b}$	Exponenten werden addiert bei gleicher Basis (Multiplikation).
$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$	Exponenten werden subtrahiert bei Division gleicher Basis.
$(x^a)^b = x^{a \cdot b}$	Potenzen werden multipliziert, wenn eine Potenz nochmals potenziert wird.
$x^{-a} = \frac{1}{x^a}$	Ein negativer Exponent kehrt die Basis um.
$x^0 = 1$	Jede Zahl (außer 0) hoch 0 ergibt 1.
$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$	Wurzeln können als Potenzen mit Bruch-Exponenten geschrieben werden.
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	Die Quadratwurzel ist die Potenz mit Exponent $\frac{1}{2}$.

5 Ableitungsregeln auf einen Blick

Funktion	Ableitung
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$
$f(x) = a^x$	$f'(x) = a^x \ln(a)$