Nutzenmaximierung berechnen, zeichnen und verstehen

YouTube

Aufgaben (Lösungen ab Seite 2)

Aufgabe 1:

Während der Klausurvorbereitung ernährt sich Elon ausschließlich von Kaffee K und Zigaretten Z. Sein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter kann mit der Nutzenfunktion

$$U(K,Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$$

beschrieben werden. Eine Tasse Kaffee kostet $P_K = 1$ Euro, eine Zigarette kostet $P_Z = 3$ Euro. Sein gesamtes Budget für Kaffee und Zigaretten beträgt $M = 32$ Euro.

(a) Berechne Elons Nutzen $U(K,Z)$ für die Güterkombinationen $U(K,Z) = (1,16)$, $U(K,Z) = (8,8)$ und $U(K,Z) = (64,4)$. Woher weißt Du, dass alle Punkte auf derselben Indifferenzkurve liegen? Stelle diese Güterkombinationen und die dazugehörige Indifferenzkurve in einer Abbildung mit K an der horizontalen und Z an der vertikalen Achse grafisch dar. Zeichne auch noch ein paar zusätzliche Indifferenzkurven ein. Bei den Indifferenzkurven reicht eine grobe, qualitativ richtige Darstellung.

(b) Berechne die Grenzrate der Substitution (GRS).

(c) Schreibe nun die Budgetbeschränkung auf und leite rechnerisch die Budgetgerade her. Geh dabei davon aus, dass wir beim Zeichnen der Budgetgerade die Zigaretten Z an der vertikalen Achse abtragen. Welche Steigung hat die Budgetgerade?

(d) Zeichne die Budgetgerade in ein Diagramm mit K an der horizontalen und Z an der vertikalen Achse.

(e) Bestimme grafisch die nutzenmaximierende Kombination aus Kaffee K und Zigaretten Z.

(f) Warum muss im Nutzenmaximum die Grenzrate der Substitution (GRS) dem Preisverhältnis entsprechen?

(g) Berechne mathematisch die nutzenmaximierende Kombination aus Kaffee K und Zigaretten Z.

Lösungen

Aufgabe 1:

Während der Klausurvorbereitung ernährt sich Elon ausschließlich von Kaffee K und Zigaretten Z. Sein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter kann mit der Nutzenfunktion

$$U(K,Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$$

beschrieben werden. Eine Tasse Kaffee kostet $P_K = 1$ Euro, eine Zigarette kostet $P_Z = 3$ Euro. Sein gesamtes Budget für Kaffee und Zigaretten beträgt $M = 32$ Euro.

(a) Berechne Elons Nutzen $U(K,Z)$ für die Güterkombinationen $U(K,Z) = (1,16)$, $U(K,Z) = (8,8)$ und $U(K,Z) = (64,4)$. Woher weißt Du, dass alle Punkte auf derselben Indifferenzkurve liegen? Stelle diese Güterkombinationen und die dazugehörige Indifferenzkurve in einer Abbildung mit K an der horizontalen und Z an der vertikalen Achse grafisch dar. Zeichne auch noch ein paar zusätzliche Indifferenzkurven ein. Bei den Indifferenzkurven reicht eine grobe, qualitativ richtige Darstellung.

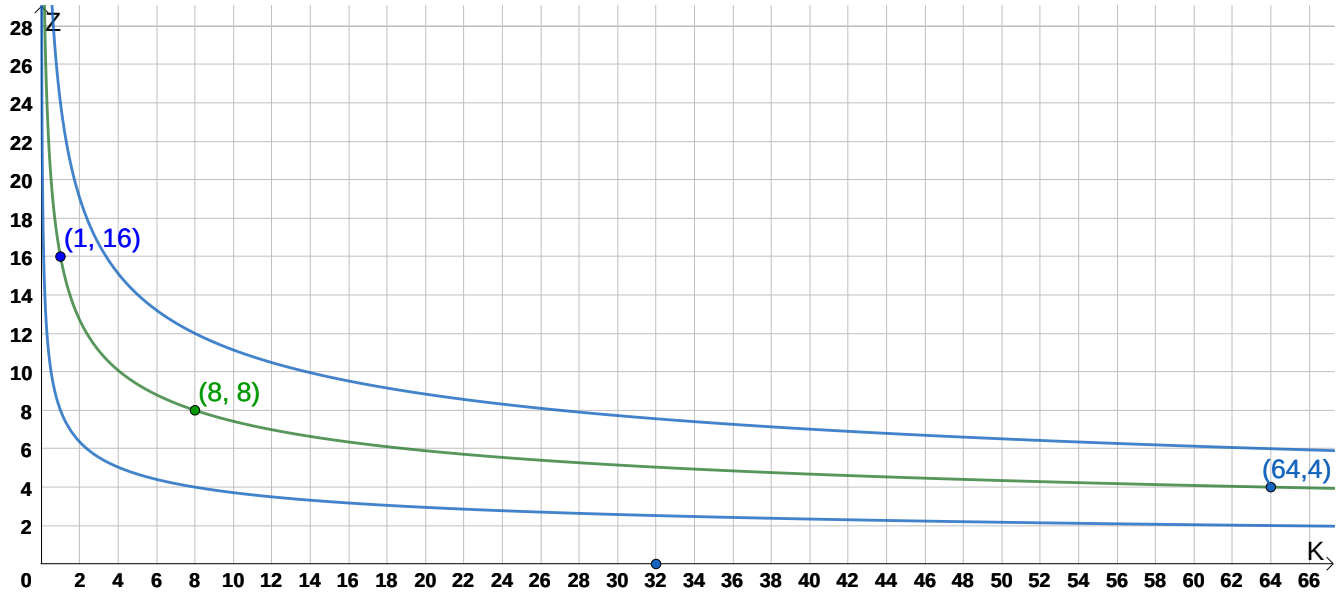
Lösung:
Wenn wir die Güterkombinationen in die Nutzenfunktion einsetzen, erhalten wir

$$U(1,16) = 1^{\frac{1}{4}} 16^{\frac{3}{4}} = 8 \quad (1)$$

$$U(8,8) = 8^{\frac{1}{4}} 8^{\frac{3}{4}} = 8 \quad (2)$$

$$U(64,4) = 64^{\frac{1}{4}} 4^{\frac{3}{4}} = 8 \quad (3)$$

Da alle drei Güterkombinationen das gleiche Nutzenniveau in Höhe von $U = 8$ versprechen, liegen alle drei Punkte $(1,16)$, $(8,8)$ und $(64,4)$ auf derselben Indifferenzkurve. Diese und zwei weitere Indifferenzkurven haben wir hier eingezeichnet:



(b) Berechne die Grenzrate der Substitution (GRS).

Die Grenzrate der Substitution entspricht dem Verhältnis der Grenznutzen. Den Grenznutzen eines Kaffees erhalten wir durch partielles Ableiten der Nutzenfunktion nach K:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{1}{4} \cdot K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}} \tag{4}$$

Analog erhalten wir den Grenznutzen einer Zigarette durch partielles Ableiten der Nutzenfunktion nach Z:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{3}{4} \cdot K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}} \tag{5}$$

Und somit ist die GRS, das Verhältnis der Grenznutzen,

$$\text{GRS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial K}}{\frac{\partial U}{\partial Z}} \tag{6}$$

$$\text{GRS} = \frac{\frac{1}{4} \cdot K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4} \cdot K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}}} = \frac{Z^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}}{3K^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}} = \frac{Z}{3K} \tag{7}$$

(c) Schreibe nun die Budgetbeschränkung auf und leite rechnerisch die Budgetgerade her. Geh dabei davon aus, dass wir beim Zeichnen der Budgetgerade die Zigaretten Z an der vertikalen Achse abtragen. Welche Steigung hat die Budgetgerade?

Lösung:
Die Budgetbeschränkung besagt, dass die gesamten Ausgaben für Kaffee und Zigaretten unserem Budget M entsprechen müssen.

$$\text{Ausgaben für } K + \text{ Ausgaben für } Z = \text{Budget} \tag{8}$$

$$P_K \cdot K + P_Z \cdot Z = M \tag{9}$$

Für die Budgetgerade lösen wir die Budgetbeschränkung nach dem Gut auf, das wir an der vertikalen Achse abtragen:

$$P_Z Z = M - P_K \cdot K \tag{10}$$

$$Z = \frac{M}{P_Z} - \frac{P_K}{P_Z} \cdot K \tag{11}$$

Wenn wir hier die Zahlen aus der Aufgabenstellung einsetzen, erhalten wir

$$Z = \frac{32}{3} - \frac{1}{3} \cdot K \tag{12}$$

Die (absolute) Steigung der Budgetgerade entspricht dem Preisverhältnis $\frac{P_K}{P_Z} = \frac{1}{3}$.

(d) Zeichne die Budgetgerade in ein Diagramm mit K an der horizontalen und Z an der vertikalen Achse.

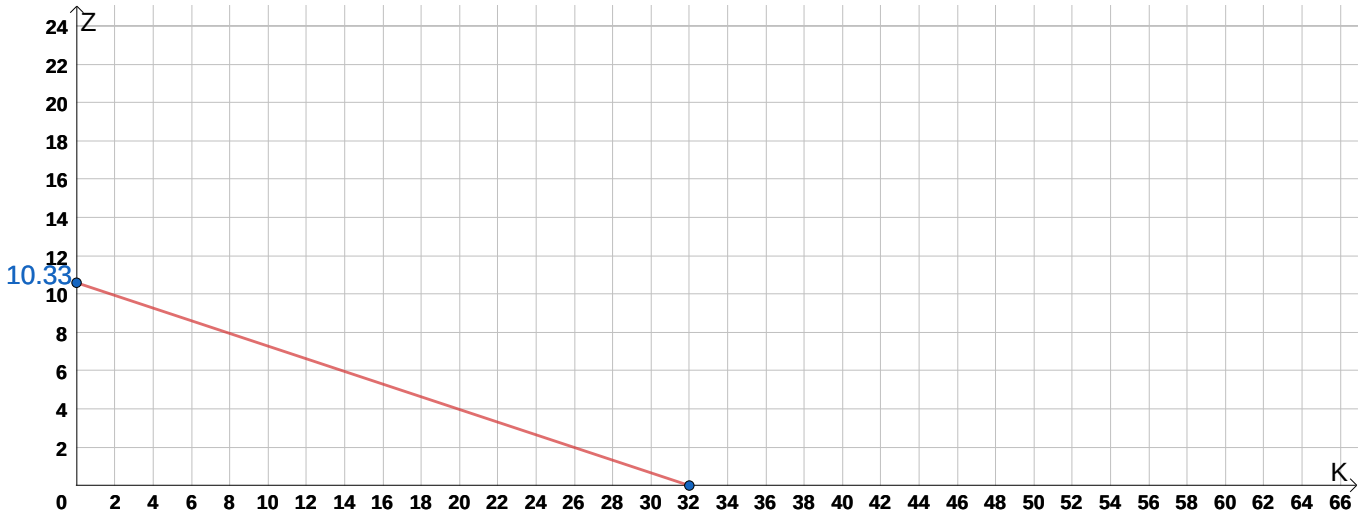
Lösung:
Wir haben die Budgetgerade bereits in Teilaufgabe (c) berechnet:

$$Z = \frac{32}{3} - \frac{1}{3} \cdot K \tag{13}$$

Wenn wir nun den Z-Achsenabschnitt bei $Z_{\max} = \frac{32}{3}$ und die absolute Steigung

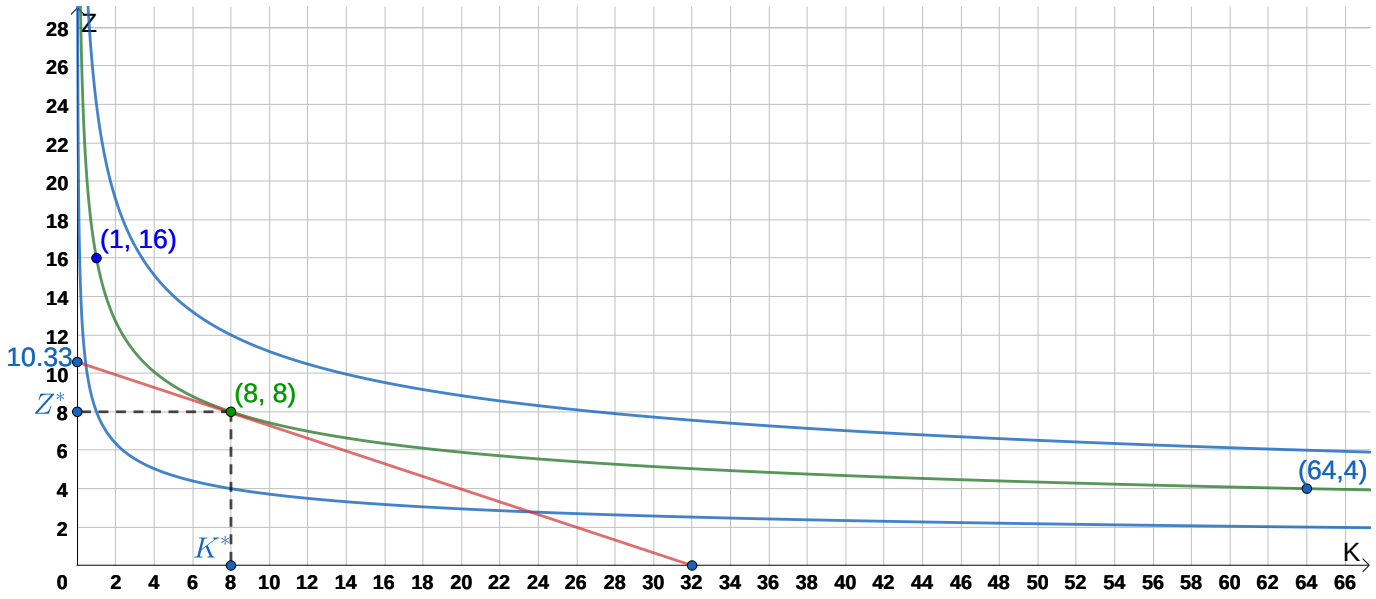
$$\frac{P_K}{P_Z} = \frac{1}{3} \tag{14}$$

(natürlich als fallende Gerade) einzeichnen, erhalten wir die folgende Abbildung.



(e) Bestimme grafisch die nutzenmaximierende Kombination aus Kaffee K und Zigaretten Z.

Lösung:
Wir finden die nutzenmaximierende Kombination aus Kaffee K und Zigaretten Z, wo die höchstmögliche Indifferenzkurve gerade noch die Budgetgerade berührt. Hier sehen wir „zufällig“ schon diese höchstmögliche Indifferenzkurve. Der nutzenmaximierende Punkt, in dem diese Indifferenzkurve die Budgetgerade noch berührt („Tangentialpunkt“), ist bei der Güterkombination $(8, 8)$. Dies haben wir in der Abbildung unten eingezeichnet.



(f) Warum muss im Nutzenmaximum die Grenzrate der Substitution (GRS) dem Preisverhältnis entsprechen?

Lösung:

- **Steigung der Indifferenzkurve (GRS):**
  Verhältnis, in dem wir die Güter austauschen **wollen**
- **Steigung der Budgetgerade (Preisverhältnis):**
  Verhältnis, in dem wir die Güter austauschen **können**

Warum gilt im Nutzenmaximum $GRS =$ Preisverhältnis?

- Annahme: $GRS >$ Preisverhältnis
- K bringt mir im Vergleich zu Z mehr zusätzlichen **Nutzen** (**GRS**)...
- Als mich K im Vergleich zu Z kostet (**Preisverhältnis**)
- Ich kann meinen Nutzen also noch erhöhen, indem ich mehr von Gut K und weniger von Gut Z kaufe.
- Dies passiert solange, bis $GRS =$ Preisverhältnis

(g) Berechne mathematisch die nutzenmaximierende Kombination aus Kaffee K und Zigaretten Z.

Lösung:

$$\begin{aligned} \text{GRS} &= \text{Preisverhältnis} && (15)\\ \frac{Z}{3K} &= \frac{1}{3} && (16)\\ Z &= K && (17) \end{aligned}$$

In die Budgetgerade (13) einsetzen:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{32}{3} - \frac{1}{3} \cdot K && (18)\\ Z &= \frac{32}{3} - \frac{1}{3} \cdot Z && (19)\\ \frac{4}{3} \cdot Z &= \frac{32}{3} && (20)\\ Z^* &= 8 && (21) \end{aligned}$$

und das in Gleichung (17) einsetzen:

$$\begin{aligned} Z &= K \\ 8 &= K \Rightarrow K^* = 8 \end{aligned}$$