



Nutzenmaximierung mit Lagrange



Aufgaben (Lösungen ab Seite 2)

Aufgabe 1:

In der stressigen Prüfungszeit ernährst Du Dich nur von Kaffee (K) und Zigaretten (Z). Dein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter beträgt

$$U(K, Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}} \quad (1)$$

Eine Tasse Kaffee kostet $P_K = 6$ Euro, eine Zigarette kostet $P_Z = 2$ Euro. Dein gesamtes Budget für Kaffee und Zigaretten beträgt $M = 120$ Euro.

- (a) Schreibe das Optimierungsproblem formal auf.
- (b) Löse die Budgetbeschränkung nach 0 auf.
- (c) Stelle die Lagrange-Funktion auf.
- (d) Leite die Lagrange-Funktion partiell nach beiden Gütern ab und setze beide Bedingungen gleich 0.
- (e) Dividiere beide Gleichungen durcheinander und löse nach einem Gut auf.
- (f) Setze das Ergebnis in die Budgetbeschränkung ein und löse nach dem anderen Gut auf.
- (g) Setze nun dieses Ergebnis wieder in einen Zwischenschritt ein, um die optimale Menge des fehlenden Gutes zu finden.

Aufgabe 2:

Löse das allgemeine Nutzenmaximierungsproblem für zwei Güter, X und Y , deren Preise P_X und P_Y , das Einkommen M und die Nutzenfunktion

$$U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta \quad (2)$$

Lösungen

Aufgabe 1:

In der stressigen Prüfungszeit ernährst Du Dich nur von Kaffee (K) und Zigaretten (Z). Dein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter beträgt

$$U(K, Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}} \quad (3)$$

Eine Tasse Kaffee kostet $P_K = 6$ Euro, eine Zigarette kostet $P_Z = 2$ Euro. Dein gesamtes Budget für Kaffee und Zigaretten beträgt $M = 120$ Euro.

- (a) Schreibe das Optimierungsproblem formal auf.

Lösung:

Finde die Kombination aus K und Z , die den Nutzen maximiert und zugleich die Nebenbedingung erfüllt.

$$\max_{K, Z} U(K, Z) \text{ u.d.Nb } P_K K + P_Z Z = M \quad (4)$$

- (b) Löse die Budgetbeschränkung nach 0 auf.

Lösung:

$$P_K K + P_Z Z = M \quad (5)$$

$$M - P_K K - P_Z Z = 0 \quad (6)$$

$$120 - 6K - 2Z = 0 \quad (7)$$

- (c) Stelle die Lagrange-Funktion auf.

Lösung:

$$\mathcal{L} = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}} + \lambda \cdot (120 - 6K - 2Z) \quad (8)$$

- (d) Leite die Lagrange-Funktion partiell nach beiden Gütern ab und setze beide Bedingungen gleich 0.

Lösung:

Partiell ableiten:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}} - 6\lambda = 0 \Rightarrow \frac{1}{4} K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}} = 6\lambda \quad (9)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Z} = \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}} - 2\lambda = 0 \Rightarrow \frac{3}{4} K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}} = 2\lambda \quad (10)$$

- (e) Dividiere beide Gleichungen durcheinander und löse nach einem Gut auf.

Lösung:

$$\frac{\frac{1}{4}K^{-\frac{3}{4}}Z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}K^{\frac{1}{4}}Z^{-\frac{1}{4}}} = \frac{6\lambda}{2\lambda} \quad (11)$$

$$\frac{1 \cdot Z^{\frac{3}{4}}Z^{\frac{1}{4}}}{3 \cdot K^{\frac{1}{4}}K^{\frac{3}{4}}} = 3 \quad (12)$$

$$\frac{Z}{3K} = 3 \quad (13)$$

$$Z = 9K \quad (14)$$

- (f) Setze das Ergebnis in die Budgetbeschränkung ein und löse nach dem anderen Gut auf.

Lösung:

Budgetbeschränkung:

$$120 - 6K - 2Z = 0 \quad (15)$$

Z aus (14) einsetzen:

$$120 - 6K - 2 \cdot 9K = 0 \quad (16)$$

$$120 = 24K \quad (17)$$

$$K^* = 5 \quad (18)$$

- (g) Setze nun dieses Ergebnis wieder in einen Zwischenschritt ein, um die optimale Menge des fehlenden Gutes zu finden.

Lösung:

Wir setzen K^* in (14) ein:

$$Z = 9K \quad (19)$$

$$Z = 9 \cdot 5 \quad (20)$$

$$Z^* = 45 \quad (21)$$

Aufgabe 2:

Löse das allgemeine Nutzenmaximierungsproblem für zwei Güter, X und Y , deren Preise P_X und P_Y , das Einkommen M und die Nutzenfunktion

$$U(X, Y) = X^\alpha Y^\beta \quad (22)$$

Lösung:

Optimierungsproblem:

$$\max_{X, Y} U(X, Y) \text{ u.d.Nb } P_X X + P_Y Y = M \quad (23)$$

Budgetbeschränkung:

$$P_X X + P_Y Y = M \quad (24)$$

$$M - P_X X - P_Y Y = 0 \quad (25)$$

Lagrange-Funktion:

$$\mathcal{L} = X^\alpha Y^\beta + \lambda \cdot (M - P_X X - P_Y Y) \quad (26)$$

Lagrange-Funktion ableiten, gleich 0 setzen und umformen:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X} = \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta - \lambda P_X = 0 \Rightarrow \alpha X^{\alpha-1} Y^\beta = \lambda P_X \quad (27)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial Y} = \beta X^\alpha Y^{\beta-1} - \lambda P_Y = 0 \Rightarrow \beta X^\alpha Y^{\beta-1} = \lambda P_Y \quad (28)$$

Dividieren und auflösen:

$$\frac{\alpha X^{\alpha-1} Y^\beta}{\beta X^\alpha Y^{\beta-1}} = \frac{\lambda P_X}{\lambda P_Y} \quad (29)$$

$$\frac{\alpha Y^\beta Y^{1-\beta}}{\beta X^\alpha X^{1-\alpha}} = \frac{P_X}{P_Y} \quad (30)$$

$$\frac{\alpha Y}{\beta X} = \frac{P_X}{P_Y} \quad (31)$$

$$Y = \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot X \quad (32)$$

In Budgetbeschränkung einsetzen und auflösen:

$$M - P_X X - P_Y Y = 0 \quad (33)$$

$$M - P_X X - P_Y \cdot \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot X = 0 \quad (34)$$

$$M - P_X X - \frac{\beta P_X}{\alpha} \cdot X = 0 \quad (35)$$

$$M = P_X X + \frac{\beta P_X}{\alpha} \cdot X \quad (36)$$

$$M = X \cdot \left[P_X + \frac{\beta P_X}{\alpha} \right] \quad (37)$$

$$M = X \cdot \left[\frac{\alpha P_X + \beta P_X}{\alpha} \right] \quad (38)$$

$$M = X \cdot \left[\frac{P_X(\alpha + \beta)}{\alpha} \right] \quad (39)$$

$$X^* = \frac{\alpha M}{P_X(\alpha + \beta)} \quad (40)$$

In Zwischenschritt (32) einsetzen und nach Y auflösen:

$$Y = \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot X \quad (41)$$

$$Y = \frac{\beta P_X}{\alpha P_Y} \cdot \frac{\alpha M}{P_X(\alpha + \beta)} \quad (42)$$

$$Y^* = \frac{\beta M}{P_Y(\alpha + \beta)} \quad (43)$$