Indifferenzkurve und Grenzrate der Substitution verstehen, zeichnen, rechnen

YouTube

Aufgaben (Lösungen auf der nächsten Seite)

1. Während der Klausurvorbereitung ernährt sich Elon ausschließlich von Kaffee K und Zigaretten Z. Sein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter kann mit der Nutzenfunktion

$$U(K, Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$$

beschrieben werden.

(a) Leite die Formel für die Indifferenzkurve mit einem beliebigen Nutzenniveau $\overline{U}$ her. Stelle dann die Indifferenzkurve mit dem Nutzenniveau $\overline{U} = 8$ in einer Abbildung mit K an der horizontalen und Z an der vertikalen Achse grafisch dar.

(b) Berechne die Grenzrate der Substitution (GRS). Du darfst Dich dabei frei für eine der beiden Formeln für die GRS entscheiden.

(c) Betrachte die Indifferenzkurve zum Nutzenniveau $\overline{U} = 8$ aus Teilaufgabe (a). Berechne die GRS auf dieser Indifferenzkurve für $K = 1$ und für $K = 8$. Was fällt Dir auf?

2. Britney, die ausschließlich Bier konsumiert, möchte sich betrinken. Sie kann sowohl einzelne Flaschen F wie auch Sixpacks S kaufen, die aus 6 Flaschen bestehen. Da aus Britneys Sicht beide Güter vollkommene Substitute sind (ein Sixpack ist genauso gut wie 6 Flaschen Bier), lautet ihre Nutzenfunktion

$$U(F, S) = F + 6S.$$

(a) Zeichne die Indifferenzkurven zu den Nutzenniveaus $U = 6$ und $U = 18$ in eine Abbildung mit F an der horizontalen und S an der vertikalen Achse.

(b) Berechne die Grenzrate der Substitution. Was fällt Dir auf?

Lösungen

1. Während der Klausurvorbereitung ernährt sich Elon ausschließlich von Kaffee K und Zigaretten Z. Sein Nutzen aus dem Konsum der beiden Güter kann mit der Nutzenfunktion

$$U(K,Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$$

beschrieben werden.

(a) Leite die Formel für die Indifferenzkurve mit einem beliebigen Nutzenniveau $\overline{U}$ her. Stelle dann die Indifferenzkurve mit dem Nutzenniveau $\overline{U} = 8$ in einer Abbildung mit K an der horizontalen und Z an der vertikalen Achse grafisch dar.

Lösung:
Zunächst fixieren wir das Nutzenniveau unserer Nutzenfunktion auf $\overline{U}$:

$$\overline{U} = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$$

Dann lösen wir die Nutzenfunktion nach Z auf, da dieses Gut nachher an der vertikalen Achse abgetragen wird:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{U}}{K^{\frac{1}{4}}} &= Z^{\frac{3}{4}} \\
\left(\frac{\overline{U}}{K^{\frac{1}{4}}}\right)^{\frac{4}{3}} &= \left(Z^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} \\
Z &= \frac{\overline{U}^{\frac{4}{3}}}{K^{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}}} \\
Z &= \frac{\overline{U}^{\frac{4}{3}}}{K^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

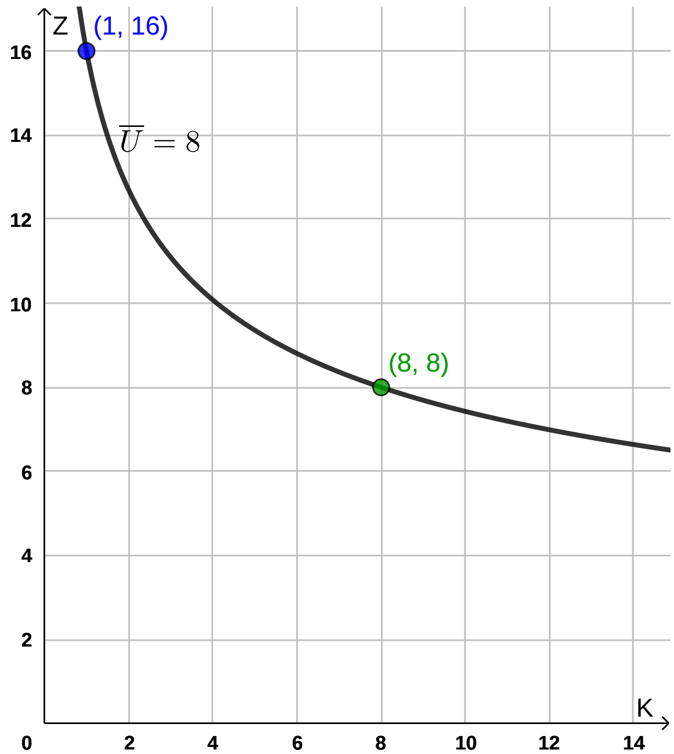
Die Indifferenzkurve zum Nutzenniveau $\overline{U} = 8$ erhalten wir, indem wir dieses Nutzenniveau in die Indifferenzkurve einsetzen:

$$\begin{aligned}
Z &= \frac{8^{\frac{4}{3}}}{K^{\frac{1}{3}}} \\
Z &= \frac{16}{K^{\frac{1}{3}}}
\end{aligned}$$

Falls wir keinen grafikfähigen Taschenrechner oder ähnliches benutzen können, zeichnen wir die Indifferenzkurve, indem wir Werte für K in unsere Gleichung für die Indifferenzkurve einsetzen und somit Punkte auf der Indifferenzkurve erhalten:

$$\begin{aligned}
& & Z &= \frac{16}{K^{\frac{1}{3}}} \\
&\text{für } K = 1 \text{ erhalten wir } \Rightarrow & Z &= \frac{16}{1^{\frac{1}{3}}} = 16 \\
&\text{für } K = 8 \text{ erhalten wir } \Rightarrow & Z &= \frac{16}{8^{\frac{1}{3}}} = 8
\end{aligned}$$

Die Indifferenzkurve für $\overline{U} = 8$ und die beiden Punkte $(1, 16)$ und $(8, 8)$ sind hier eingezeichnet:



(b) Berechne die Grenzrate der Substitution (GRS). Du darfst Dich dabei frei für eine der beiden Formeln für die GRS entscheiden.

Lösungsmöglichkeit 1: GRS ist das Verhältnis der Grenznutzen
Die Grenzrate der Substitution entspricht dem Verhältnis der Grenznutzen. Den Grenznutzen eines Kaffees erhalten wir durch partielles Ableiten der Nutzenfunktion nach K:

$$\frac{\partial U}{\partial K} = \frac{1}{4} \cdot K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$$

Analog erhalten wir den Grenznutzen einer Zigarette durch partielles Ableiten der Nutzenfunktion nach Z:

$$\frac{\partial U}{\partial Z} = \frac{3}{4} \cdot K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}}$$

Und somit ist die GRS, das Verhältnis der Grenznutzen,

$$\text{GRS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial K}}{\frac{\partial U}{\partial Z}}$$

$$\text{GRS} = \frac{\frac{1}{4} \cdot K^{-\frac{3}{4}} Z^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4} \cdot K^{\frac{1}{4}} Z^{-\frac{1}{4}}} = \frac{Z^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}}{3K^{\frac{1}{4}} K^{\frac{3}{4}}} = \frac{Z}{3K}$$

Lösungsmöglichkeit 2: GRS ist die Steigung der Indifferenzkurve
Die Grenzrate der Substitution entspricht der Steigung der Indifferenzkurve mit umgedrehtem Vorzeichen. Um uns die Ableitung zu vereinfachen, schreiben wir hier die Formel für die Indifferenzkurve noch einmal auf, wobei wir berücksichtigen, dass $1/x^a = x^{-a}$:

$$Z = \overline{U}^{\frac{4}{3}} \cdot K^{-\frac{1}{3}}$$

Jetzt können wir dies mit der normalen Formel nach K ableiten und so die absolute Steigung der Indifferenzkurve berechnen:

$$\begin{aligned}
\text{GRS} &= -\frac{dZ}{dK} \\
\text{GRS} &= -\overline{U}^{\frac{4}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot K^{-\frac{4}{3}} \\
\text{GRS} &= \frac{1}{3} \cdot \overline{U}^{\frac{4}{3}} \cdot K^{-\frac{4}{3}}
\end{aligned}$$

Wenn wir nun unsere Nutzenfunktion $U(K, Z) = K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}}$ einsetzen, erhalten wir als GRS

$$\begin{aligned}
\text{GRS} &= \frac{1}{3} \cdot (K^{\frac{1}{4}} Z^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}} \cdot K^{-\frac{4}{3}} \\
\text{GRS} &= \frac{1}{3} K^{\frac{1}{3}} Z^1 \cdot K^{-\frac{4}{3}} \\
\text{GRS} &= \frac{1}{3} K^{-\frac{3}{3}} Z = \frac{Z}{3K}
\end{aligned}$$

(c) Betrachte die Indifferenzkurve zum Nutzenniveau $\overline{U} = 8$ aus Teilaufgabe (a). Berechne die GRS auf dieser Indifferenzkurve für die Punkte (1,16) und (8,8). Was fällt Dir auf?

Lösung:
Wir verwenden unser Ergebnis für die GRS aus der vorherigen Teilaufgabe:

$$\text{GRS} = \frac{Z}{3K}$$

Für $K = 1$ und $Z = 16$ erhalten wir

$$\text{GRS} = \frac{16}{3 \cdot 1} \approx 5,33$$

Und für $K = 8$ und $Z = 8$ erhalten wir

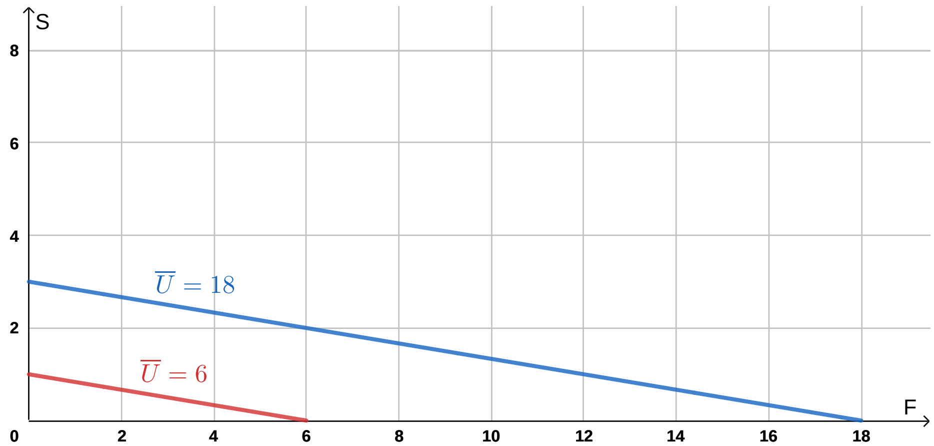
$$\text{GRS} = \frac{8}{3 \cdot 8} = \frac{1}{3} \approx 0,33$$

Wir sehen, dass mit einer steigenden Menge an Kaffee die GRS abnimmt. Das bedeutet, je mehr Kaffee wir haben, desto weniger Zigaretten muss man uns anbieten, damit wir bereit sind, auf einen Kaffee zu verzichten: Wenn wir erst einen Kaffee haben, brauchen wir mindestens 5,33 Zigaretten als Kompensation, während bei 8 Tassen Kaffee bereits 0,33 Zigaretten als Ausgleich für den Verzicht auf einen Kaffee ausreichen, damit sich der Nutzen von Elon nicht ändert. Das macht auch Sinn: Je mehr Kaffee wir schon haben, desto wenig schlimm ist der Verzicht auf eine einzelne Tasse.

2. Britney, die ausschließlich Bier konsumiert, möchte sich betrinken. Sie kann sowohl einzelne Flaschen F wie auch Sixpacks S kaufen, die aus 6 Flaschen bestehen. Da aus Britneys Sicht beide Güter vollkommene Substitute sind (ein Sixpack ist genauso gut wie 6 Flaschen Bier), lautet ihre Nutzenfunktion
$$U(F,S) = F + 6S.$$

   (a) Zeichne die Indifferenzkurven zu den Nutzenniveaus $U = 6$ und $U = 18$ in eine Abbildung mit F an der horizontalen und S an der vertikalen Achse.

   Lösung:
   Auch wenn diese Nutzenfunktion etwas ungewöhnlich aussieht, können wir die Indifferenzkurven mit dem normalen Ansatz berechnen. Wir setzen also zunächst den Nutzen konstant (gleich $\overline{U}$):
$$\overline{U} = F + 6S$$
   Und lösen nach S auf:
$$\begin{aligned} 6S &= \overline{U} - F \\ S &= \frac{\overline{U}}{6} - \frac{F}{6} \end{aligned}$$
   Somit lautet die Indifferenzkurve für $\overline{U} = 6$
$$\begin{aligned} S &= \frac{6}{6} - \frac{F}{6} \\ S &= 1 - \frac{F}{6} \end{aligned}$$
   Dies ist eine Gerade mit dem Achsenabschnitt bei $S = 1$ und der Steigung $-1/6$. Analog lautet die Indifferenzkurve für $\overline{U} = 18$
$$\begin{aligned} S &= \frac{18}{6} - \frac{F}{6} \\ S &= 3 - \frac{F}{6} \end{aligned}$$
   Dies ist eine Gerade mit dem Achsenabschnitt bei $S = 3$ und ebenfalls der Steigung $-1/6$. Wir sehen also, dass bei perfekten Substituten die Indifferenzkurven Geraden sind.



(b) Berechne die Grenzrate der Substitution. Was fällt Dir auf?

Lösungsmöglichkeit 1: GRS ist das Verhältnis der Grenznutzen

Die GRS entspricht dem Verhältnis der Grenznutzen. Den Grenznutzen einer Flasche Bier erhalten wir durch partielles Ableiten der Nutzenfunktion nach F:

$$\frac{\partial U}{\partial F} = 1$$

Analog erhalten wir den Grenznutzen eines Sixpacks durch partielles Ableiten der Nutzenfunktion nach S:

$$\frac{\partial U}{\partial S} = 6$$

Und somit ist die GRS, das Verhältnis der Grenznutzen:

$$\text{GRS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial F}}{\frac{\partial U}{\partial S}} = \frac{1}{6}$$

Wir sehen, dass die Grenzrate der Substitution konstant und gleich $1/6$ Sixpack pro Flasche Bier ist. Da einzelne Flaschen und Sixpacks perfekte Substitute im Verhältnis 6:1 ist, sollte es nicht überraschend, dass Britney bereit ist, pro zusätzlicher einzelner Flasche Bier auf $1/6$ Sixpack zu verzichten.

Lösungsmöglichkeit 2: GRS ist die Steigung der Indifferenzkurve:

Die Grenzrate der Substitution entspricht der Steigung der Indifferenzkurve mit umgedrehtem Vorzeichen. Unsere Indifferenzkurve lautet allgemein

$$S = \frac{\overline{U}}{6} - \frac{F}{6}$$

Somit ist die absolute Steigung der Indifferenzkurve (und damit die GRS)

$$\text{GRS} = -\frac{dS}{dF} = \frac{1}{6}$$